MATHÉMATIQUES Épreuve n° 2 (problème) (Annulée)

Options T et TA Durée : 3 heures

Les candidats sont invités à donner de leurs affirmations des justifications complètes mais brèves .
Il sera tenu compte de la présentation des copies .
Les parties II, III, IV sont indépendantes de la partie I .
La partie IV peut être traitée immédiatement après la question III.2°) .

I

Le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ étant rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'ellipse E de représentation paramétrique

$$t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = a.\cos t.\vec{i} + b.\sin t\,\vec{j} \quad , \quad t \in [0,2\pi],$$

$0 < b < a$; son foyer S de coordonnées $(c,0)$, $(0 < c < a)$ et son sommet A de coordonnées $(a,0)$. On désigne par γ le chemin constitué du segment SA orienté de S vers A, de l'arc AM(u) de E orienté de A vers M(u) et du segment M(u)S orienté de M(u) vers S. On note D la partie de $\mathbb{R}^2$ intérieure au chemin γ .

1°) Calculer l'intégrale curviligne : $\int_\gamma (-y\,dx + x\,dy)$.

2°) Que représente cette intégrale pour le domaine D ?

II

Soient α , $0 < \alpha < 1$ et $f : u \mapsto f(u) = u - \alpha \sin u$.

1°) Etudier les variations de f ; montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Soit g la bijection réciproque , $g = f^{-1}$. g est-elle dérivable? est-elle de classe C^∞ ?

2°) Représenter graphiquement les fonctions f et g . Déterminer un majorant de $|g(v)-v|$ pour $v \in \mathbb{R}$. Comparer , pour $v \in \mathbb{R}$, $g(2\pi - v)$, $g(2\pi - v)$ et $g(v)$.

3°) Soit $v \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par les relations :

$$u_0 = v \quad , \quad u_n = v + \alpha \sin u_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1 .$$

Comparer $|u_n - g(v)|$ et $|u_{n-1} - g(v)|$. Que peut-on en conclure ?

4°) Application numérique : pour $\alpha = 0{,}2$ et $v = 0{,}8$ déterminer une valeur décimale approchée à 10^{-4} près de $g(v)$.

III

Soient α , $0 < \alpha < 1$ et $h : v \mapsto g(v) - v$.

1°) Montrer que h est continue , 2π-périodique et impaire . Représenter graphiquement la fonction h .

2°) On s'interesse dans la suite de cette partie au coefficient b_1 de la série de Fourier de h . Etablir les relations :

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g'(v) \cos v \, dv$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi} . \int_0^\pi \cos (u - \alpha \sin u) \, du \quad .$$

3°) Calculer les intégrales : $I = \int_0^\pi \cos(\alpha \sin u)\cos u \, du$

et $I_k = \int_0^\pi (\sin u)^{2k+2} \, du$, $k \in \mathbb{N}$.

En déduire une expression de b_1 sous la forme d'une somme de série .

4°) Application numérique : pour $\alpha = 0{,}2$ déterminer une valeur décimale approchée à 10^{-4} près de b_1 .

IV

Les notations sont celles des parties II et III .
On pose , pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos (x.\sin t - nt) \, dt .$$

1°) Exprimer le coefficient b_n de la série de Fourier de h à l'aide de la fonction J_n .

2°) Donner une expression de g comme somme d'une série de fonctions .

e e e